Matriz de Insumo - Producto

Introducción

En esta sección vamos a suponer que en la economía de un país hay sólo tres sectores: industria (todas las fábricas juntas), agricultura (todo lo relacionado a agricultura y ganadería), y servicios (energía eléctrica, agua, combustibles). Además, supondremos que esta economía es cerrada, no hay importaciones.

Para funcionar, cada uno de éstos sectores necesita comprarle insumos a los otros, y también a sí mismo, y hay una cierta cantidad de bienes que se venden a terceros. Para que uno de los sectores aumente su producción, se presenta un problema: los demás también deberán producir más y así poder abastecerlo de los insumos que necesita.

Supongamos que los consumidores comprarán más productos textiles. La industria debe producir más, y va a consumir más materias primas del sector agricultura; más energía eléctrica y combustibles que le provee el sector servicios; y más maquinarias o herramientas producidas por el propio sector industria.

Entonces, para poder aumentar la producción de la industria, deben aumentar su producción los otros sectores también. Y ésto se traslada a los otros sectores: como agricultura y servicios van a aumentar su producción, necesitarán también más materias primas (del sector agricultura), herramientas (de industria) y energía (de servicios).

Si pensamos un momento, vemos que la industria -que tiene una demanda mayor de sus productos- no sólo tiene que aumentar su producción para cubrir esa propia demanda, sino que también debe producir para que los otros sectores puedan aumentar la suya y brindarle los insumos que necesita.

Se vé que el problema no es simple, y surgen muchas preguntas: ¿cuánto debe producir cada sector, entonces? ¿Cómo prever estos aumentos de producción, si el cambio de uno obliga a cambios en la producción de los otros?

La respuesta a este problema se debe a Wassily Leontief, matemático de origen ruso que emigró a Estados Unidos. Leontief obtuvo el premio Nobel de economía en 1973: “por el desarrollo del modelo de insumo-producto (también conocido como input-output) y por sus aplicaciones a importantes problemas económicos”, según la propia Fundación Nobel.

Este método es hoy día una herramienta importante para la planificación de la producción económica de los países.

Por ejemplo, la importancia que suele atribuirse a la evolución del sector de la construcción deriva, precisamente, del hecho que el mismo demanda, de manera directa e indirecta, insumos provenientes de un conjunto amplio de otras actividades. Por lo tanto, el aumento de la actividad de la construcción acarrea el aumento de la producción de muchos otros sectores.

Matriz de Insumo Producto

Analicemos esta tabla con tres sectores: Agricultura, Industria y Servicios, que están relacionados entre sí.

Si fijamos un sector, leyendo verticalmente, cada columna nos dice cuántos insumos le compra ese sector a los demás. Por ejemplo Industria debe utilizar insumos de otros sectores y compra: a Agricultura 200, a Industria 350 y a Servicios 300 (según se lee en la columna de industria).

Horizontalmente, cada fila nos dice cuánto vende cada sector a los demás. Por ejemplo, la producción de Industria es vendida de la siguiente forma: Agricultura 70, Industria 350 y Servicios 230 (siguiendo la fila de Industria).

	Agricultura	Industria	Servicios	Demanda Final	Valor Bruto de la produccion
Agricultura	50	200	15	235	500
Industria	70	350	230	350	1000
Servicios	100	300	110	445	955
Valor Agregado	280	150	600		
Valor Bruto de la produccion	500	1000	955		2455

Hay otra columna que no corresponde a un sector, la columna de Demanda final. Allí aparecen los consumos que no corresponden a los tres sectores acá incluidos: representan las compras de los consumidores finales (que no se encuandran en ningún sector productivo), a la inversión (es la parte de la producción del período que se "acumula"para los siguientes), incluye las exportaciones, etc. Por ejemplo, siguiendo con Industria, vende otros 350 además de lo que vende a los 3 sectores acá incluidos.

Finalmente, la última columna corresponde al Valor Bruto de la producción de a cada sector: es la suma de todas las ventas, por ejemplo en el caso de Industria: $70 + 350 + 230 + 350 = 1000$.

Mirando por filas, falta comentar la fila de Valor Agregado, que surge como la diferencia entre el Valor Bruto de la producción y el valor de los insumos de cada sector. En el caso de Industria es: 1000 - (200 + 350 + 300) = 150. El Valor Agregado corresponde a las remuneraciones de los trabajadores que se requieren para la producción, y también al beneficio bruto. Este beneficio bruto surge como la diferencia entre el valor agregado y las remuneraciones.

La tabla como sistema de ecuaciones

Ahora expresaremos esta tabla como sistema de ecuaciones lineales. Primero reemplazaremos los números y sectores por letras genéricas. Por ejemplo x_{23} representa el valor del insumo 2 (que era industria) que utiliza el sector 3 (que era Servicios).

	S1	S2	S3	DF	VBP
S1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	Y_1	X_1
S2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	Y_2	X_2
S3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	Y_3	X_3
VA	VA_1	VA_2	VA_3		
VBP	X_1	X_2	X_3		

Si representamos la tabla como un sistema de ecuaciones, dado que las ventas de cada sector sumadas a la demanda final coinciden con el valor bruto de la producción, tenemos:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + Y_1 = X_1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + Y_2 = X_2$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + Y_3 = X_3$$

Coeficientes técnicos

Las columnas de la tabla de insumo producto representan la estructura de costos de cada sector. Si se divide el valor de cada insumo por el valor bruto de producción correspondiente (el total de la columna), se obtienen los coeficientes técnicos (que registran la necesidad de insumos de cada sector para producir una unidad del producto que dicho sector produce):

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{Xj} \qquad \text{donde i indica al sector que vende y j al que produce.}$$

O sea: se divide cada coeficiente de una columna por el total de la misma. En nuestro ejemplo queda (redondeando al segundo decimal):

	Agricultura	Industria	Servicios
Agricultura	$50/500 = 0{,}10$	$200/1000 = 0{,}20$	$15/955 = 0{,}02$
Industria	$70/500 = 0{,}14$	$350/1000 = 0{,}35$	$230/955 = 0{,}24$
Servicios	$100/500 = 0{,}20$	$300/1000 = 0{,}30$	$110/955 = 0{,}12$

Como $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{Xj}$, entonces $x_{ij} = a_{ij}Xj$. Usando esto, podemos reescribir el sistema de ecuaciones así:

$$a_{11}.X_1 + a_{12}.X_2 + a_{13}.X_3 + Y_1 = X_1$$

$$a_{21}.X_1 + a_{22}.X_2 + a_{23}.X_3 + Y_2 = X_2$$

$$a_{31}.X_1 + a_{32}.X_2 + a_{33}.X_3 + Y_3 = X_3$$

En nuestro ejemplo quedaría:

$$0,10X_1 + 0,20X_2 + 0,02X_3 + Y_1 = X_1$$

$$0,14X_1 + 0,35X_2 + 0,24X_3 + Y_2 = X_2$$

$$0,20X_1 + 0,30X_2 + 0,12X_3 + Y_3 = X_3$$

Si llamamos A a la matriz de coeficientes técnicos, Y a la de demanda final y X a la de valor bruto de producción, tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

el sistema expresado en forma matricial nos queda:

$$X = A.X + Y$$

De más está decir que todo lo que hicimos con 3 sectores, se puede hacer con cualquier cantidad de ellos. En la realidad, no es extraño que las matrices de insumo producto de un país tengan más de 50 sectores.

Coeficientes de requisitos directos e indirectos

Para medir las necesidades de producción de cada sector ante un cambio de la demanda final (la matriz Y) se opera algebraicamente con las matrices a partir de la ecuación de más arriba:

$$X = A.X + Y \quad \Rightarrow \quad X - A.X = Y \quad \Rightarrow \quad (I - A).X = Y$$

Calculando la inversa de $(I - A)$, y multiplicando a izquierda por $(I - A)^{-1}$ se tiene

$$X = (I - A)^{-1}.Y$$

A la matriz $(I - A)$ se la llama matriz de Leontief, y a $(I - A)^{-1}$ se la llama matriz de coeficientes directos e indirectos. Utilizando esta última, a partir de una variación de la demanda final Y^* se obtiene una nueva matriz de producción X^*, y se puede construir la nueva tabla:

$$X^* = (I - A)^{-1}.Y^*$$

En este paso está la hipótesis principal del modelo de Leontief: dice que la matriz de coeficientes técnicos A es siempre la misma, aunque cambie la demanda final Y. También la matriz de coeficientes directos e indirectos $(I - A)^{-1}$ es la misma, ya que sólo depende de A.

En la práctica, estas matrices varían por distintos motivos (adelantos tecnológicos, aparición de nuevos sectores o desaparición de otros, etc.) y suelen ser re-calculadas cada cierto tiempo.

En nuestro ejemplo:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,10 & 0,20 & 0,02 \\ 0,14 & 0,35 & 0,24 \\ 0,20 & 0,30 & 0,12 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,90 & -0,20 & -0,02 \\ -0,14 & 0,65 & -0,24 \\ -0,20 & -0,30 & 0,88 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$$

De esta forma, si la demanda final, en vez de ser

$$Y = \begin{pmatrix} 235 \\ 350 \\ 445 \end{pmatrix} \qquad \text{fuera} \quad Y^* = \begin{pmatrix} 700 \\ 500 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

se podría calcular el nuevo valor bruto de la producción $X*$ haciendo:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0,90 & -0,20 & -0,02 \\ -0,14 & 0,65 & -0,24 \\ -0,20 & -0,30 & 0,88 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 700 \\ 500 \\ 1000 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1,21 & 0,44 & 0,14 \\ 0,41 & 1,91 & 0,53 \\ 0,41 & 0,75 & 1,35 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 700 \\ 500 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1207 \\ 1772 \\ 2012 \end{pmatrix}$$

Conociendo los nuevos valores brutos de producción, podemos armar la nueva tabla, usando que

$$a^*_{ij} = \frac{x^*_{ij}}{X^*_j}$$

Como la matriz de Leontief $A = (a_{ij})$ no varía, $a^*_{ij} = a_{ij}$

Podemos colocar los datos que ya tenemos, X^* e Y^*,

	Agricultura	Industria	Servicios	DF	VBP
Agricultura	x^*_{11}	x^*_{12}	x^*_{13}	700	1207
Industria	x^*_{21}	x^*_{22}	x^*_{23}	500	1772
Servicios	x^*_{31}	x^*_{32}	x^*_{33}	1000	2012
VA	VA_1	VA_2	VA_3		
VBP	1207	1772	2012		

Luego calculamos cada lugar x^*_{ij} y completamos.

Por último, se obtiene el valor agregado sumando en cada columna y restando del valor bruto de la producción.

Aclaración: Si hacen las cuentas con detalle, verán que los valores no coinciden:

$$x^*_{11} = 0,10 \times 1207 = 120,7$$

$$x^*_{12} = 0,20 \times 1772 = 354,4$$

$$x^*_{13} = 0,02 \times 2012 = 40,24$$

Sumando,

$$120,7 + 354,4 + 40,24 + 700 = 1215,34$$

que no coincide con el valor 1207.

El error se debe a las aproximaciones numéricas al calcular la inversa, recordemos que trabajamos con sólo dos decimales exactos. Eso nos devolvió en el resultado sólo dos dígitos precisos, 1215,34 contra 1207 (en las aplicaciones prácticas, es bueno detectar las fuentes de errores numéricos, y aunque luego no nos tomemos la molestia de corregirlas, deberíamos ser capaces de determinar qué tan grave es el error).

Ejemplo:

a) Completar la siguiente tabla de insumo producto para un sistema económico de dos sectores:

	S_1	S_2	DF	VBP
S_1	180		10	200
S_2		80	0	100
VA				
VBP				

b) Hallar la matriz A de coeficientes técnicos y la matriz de coeficientes directos e indirectos $(I - A)^{-1}$.

c) Calcular la tabla de insumo producto para el año siguiente, sabiendo que la demanda final será

$$Y^* = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) Observemos que en una primera mirada, podemos completar cuatro lugares de la tabla:

-En la primera fila, la compra del sector S_2 al sector S_1, llamémosla x_{12} tiene que cumplir que:

$$180 + x_{12} + 10 = 200$$

y despejando, tiene que ser $x_{12} = 10$.

-En la segunda fila, la compra del sector S_1 al sector S_2, llamémosla x_{21} tiene que cumplir que:

$$x_{21} + 80 + 0 = 100$$

y despejando, tiene que ser $x_{21} = 20$.

-En la cuarta fila, el valor bruto de la producción es el mismo de la cuarta columna, 200 para el sector S_1, y 100 para el sector S_2. Entonces:

	S_1	S_2	DF	VBP
S_1	180	10	10	200
S_2	20	80	0	100
VA				
VBP	200	100		

Ahora calculamos los valores agregados.

-En la primera columna, como la suma tiene que dar 200, el valor agregado de S_1 es cero.

-En la segunda columna, como la suma tiene que dar 100, el valor agregado de S_2 es 10.

Obtenemos:

	S_1	S_2	DF	VBP
S_1	180	10	10	200
S_2	20	80	0	100
VA	0	10		
VBP	200	100		

b) Para hallar la matriz A de coeficientes técnicos recordemos que

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$$

Entonces,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{180}{200} & \frac{10}{100} \\ \\ \frac{20}{200} & \frac{80}{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \\ \frac{1}{10} & \frac{8}{10} \end{pmatrix}$$

Ahora, la matriz de Leontief es $(I - A)$:

$$(I - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \\ \frac{1}{10} & \frac{8}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}$$

Nos piden ahora la inversa de esta matriz, la matriz de requerimientos directos e indirectos:

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$$

c) Calculemos los nuevos valores brutos de producción. Se tiene

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 180 \end{pmatrix}$$

Finalmente, armamos otra vez la tabla. Calculemos cada lugar x_{ij}:

$$x_{11} = a_{11}.X_1 = \frac{9}{10},300 = 270 \qquad x_{12} = a_{12}.X_2 = \frac{1}{10},180 = 18$$

$$x_{21} = a_{21}.X_1 = \frac{1}{10},300 = 30 \qquad x_{22} = a_{22}.X_2 = \frac{8}{10},180 = 144$$

Con lo cual, la tabla será:

	S_1	S_2	DF	VBP
S_1	270	18	12	300
S_2	30	144	6	180
VA	0	18		
VBP	300	180		