APUNTES SOBRE EL MÉTODO SÍMPLEX DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Adriel R. Collazo Pedraja

INTERPRETACIÓN DEL CUARTO TABLÓN

Los valores de los ΔZ_j, de 0 y positivos indican que la solución es óptima. Las variables básicas son: X_1 con valor de 200 unidades, X_2 con 600 unidades y S_2 con 500 unidades. La variable S_1 al igual que las artificiales, estas últimas se eliminaron del tablón son variables no básicas. Un examen del tablón óptimo refleja el traslado de la matriz identidad hacia el lado izquierdo de la tabla. Se corrobora el costo para la solución final al sustituir en la ecuación; $Z_{IV} = Z_{III} + (\Delta Z_{III})(\text{Ratio}_{III})$, por lo tanto $Z_{IV} = 1700 + 500M + (\$7-M)(500) = \$5{,}200$. La empresa utilizará 200 unidades de vitaminas para perros en crecimiento y 600 unidades de vitaminas para perros adultos para un costo semanal de \$5,200. La variable $S_2 = 500$ representa un exceso de 500 unidades de las vitaminas para perros adultos sobre el mínimo necesario de 100 unidades. Acuérdese que la variable se relaciona con la segunda restricción, $1X_2 \geq 100$ (unidades de vitaminas para perros adultos). Si la solución para X_2 son 600 unidades y el mínimo requerido son 100 unidades entonces S_2 será igual a 500 unidades; ($X_2 + S_2 = 100$, al sustituir en la ecuación; $600 + S_2 = 100$ por lo tanto $S_2 = 600 - 100$).

		X_1	X_2	S_1	S_2	IV
	C_i / C_J	5	7	0	0	C_J/b_i
X_1	5	1	0	1	0	200
X_2	7	0	1	-1	0	600
S_2 $\cancel{A_3}$	0	0	0	-1	1	500
	Z_j	5	7	-2	0	5200
	ΔZ_j	0	0	2	0	

CUARTA TABLA SÍMPLEX
TABLÓN ÓPTIMO

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD SÍMPLEX

El análisis de sensibilidad símplex se conoce como análisis post óptimo o análisis de cambios a la solución óptima. Su propósito es ver como cambios en diferentes parámetros afectan la solución óptima sin que estos violenten la solución y poder así leer los resultados de estos efectos en la solución. Es decir, se desea ver los efectos de cambios en los parámetros de la solución óptima sin tener que reformular el problema y tener que volver hacer los cálculos símplex. Para efectos de este trabajo analizaremos tres tipos de cambios, estos son; cambios en los coeficientes (C_j) de las variables no básicas, cambios en los coeficientes (C_j) de las variables básicas y cambios en los niveles de los recursos o valores al lado derecho de las restricciones (b_i).

Se utilizará el siguiente ejemplo para explicar el concepto de análisis de sensibilidad.

Maximizar $Z = 4X_1 + 2X_2$
Sujeto a: $2X_1 + 2X_2 \leq 150$
$1X_1 + 2X_2 \leq 100$
$(X_1, X_2 \geq)0$

		X_1	X_2	S_1	S_2	
	C_i / C_J	4	2	0	0	C_J/b_i
X_1	4	1	1	½	0	75
S_2	0	0	1	-½	1	25
	Z_j	4	4	2	0	300
	ΔZ_j	4	-2	0	0	

TABLÓN ÓPTIMO

CAMBIOS EN LOS COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO PARA VARIABLES NO BASICAS

		X_1	X_2	S_1	S_2	
	C_i / C_J	4	$2+\Delta$	0	0	C_J/b_i
X_1	4	1	1	½	0	75
S_2	0	0	1	-½	1	25
	Z_j	4	4	2	0	300
	ΔZ_j	0	$-2+\Delta$	-2	0	

TABLÓN ÓPTIMO

En este ejemplo las variables no básicas son: X_2 y S_1 con valores de 0.

Nos interesa el contemplar los efectos de un cambio en los coeficientes de la función objetivo para la variable real X_2. Es decir, se desea conocer por cuánto será el cambio máximo para la constante C_2 con valor de 2 y que a su vez las variables básicas y no básicas se mantengan en el tablón, sin afectar la solución óptima de 300.

Para contestar la interrogante se utilizará el tablón óptimo. La respuesta se basará en la búsqueda de los intervalos para los cambios máximos permitidos a la variable. Se comienza agregando un delta (Δ) en todo lugar donde esté ubicada la variable no básica. La variable X_2 aparece solo en la segunda columna. Se agrega a la constante 2 el Δ; $(2 +\Delta)$.

La tabla final permanece sin cambio excepto por el cómputo del $\Delta Z_2 = C_2 - Z_2$. Si Z_2 es 2 y C_2 es ahora $2 +\Delta$ entonces ΔZ_2 será igual a $-2+\Delta$.

Como este es un caso de maximización, la solución óptima actual se quedará óptima mientras los ΔZ_j se mantengan negativos para las variables no básicas y 0 para las variables básicas.

$\Delta Z_j \leq 0$

Por lo tanto mientras que el ΔZ_2 no sea positivo, la solución será misma. Resolvemos para hallar el intervalo de la siguiente forma.

$\Delta Z_2 \leq 0$

$-2+\Delta \leq 0$

$\Delta \leq 2$

$-\infty \leq \Delta \leq 2$

Esto significa que C_2, el coeficiente de X_2 no puede aumentar por más de 2 unidades sin afectar la solución óptima. La variable X_2 puede tener coeficientes entre negativo infinito y positivo 4. Por ejemplo el intervalo para X_2 donde $-\infty \leq \Delta \leq 2$ se busca sustituyendo donde;

$2+\Delta \leq X_2 \leq 2+\Delta$

$2-\infty \leq X_2 \leq 2+2$

$-\infty \leq X_2 \leq 4$

Este intervalo indica que la variable X_2 puede tener un valor máximo de 4 y de negativo infinito.

CAMBIOS EN LOS COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO PARA VARIABLES BASICAS

Es de interés el conocer el cambio máximo permitido para el coeficiente de la función objetivo para una variable básica antes que se afecten las variables básicas remanentes en una solución óptima. Un cambio en una variable básica puede afectar las demás variables básicas porque está se encuentra en la fila y en la columna, creando efecto en los ΔZ_j y a su vez la solución actual. El cambio de una variable básica puede causar dos efectos. Primero existe la posibilidad de que la variable deje de ser básica, si el coeficiente de la contribución de la variable disminuye. Esto crea la posibilidad de que la variable deje de ser básica porque resulta menos rentable el mantenerla en la base. Por otro lado un aumento en la contribución a las ganancias de una variable básica puede causar un mayor nivel de producción de la variable. Como consecuencia se debe considerar ambos casos; aumento y disminución de los coeficientes.

Considere los cambios para el coeficiente de la variable básica X_1. Al agregar un Δ en donde esta ubicada la variable, se crea un efecto en los ΔZ_j para las columnas.

		X_1	X_2	S_1	S_2	
	C_j / C_I	$4+\Delta$	2	0	0	C_I/b_i
X_1	$4+\Delta$	1	1	½	0	75
S_2	0	0	1	-½	1	25
	Z_j	$4+\Delta$	$4+\Delta$	$2+½\Delta$	0	$300+75\Delta$
	ΔZ_j	0	$-2-\Delta$	$-2-½\Delta$	0	

$\Delta Z_1 = 0$
$\Delta Z_2 = -2-\Delta$
$\Delta Z_3 = -2-½\Delta$
$\Delta Z_4 = 0$
$Z = 300+75\Delta$

Para hallar los intervalos de optimalidad se analizan todos los cambios los ΔZ_j para su cumplimiento. Acuérdese que se está maximizando por lo tanto los ΔZ_j deberán ser negativos o cero. Se procede a resolver para: $-2-\Delta \leq 0$ y $-2-½\Delta \leq 0$.

$-2-\Delta \leq 0$	$-2-½\Delta \leq 0$
$-\Delta \leq 2$	$\dfrac{-½\Delta \leq 2}{-½}$
$\Delta \geq -2$	$\Delta \geq -4$

El cambio $\Delta \geq -2$ cumple con el cambio $\Delta \geq -4$ porque este es mayor que -4 pero no así lo contrario. Expresamos el intervalo de la siguiente forma; $-2 \leq \Delta \leq \infty$ o en términos de la variable real, $2 \leq X_1 \leq \infty$.

¿Ahora bien, se podrá aumentar el coeficiente de la variable X_1 a \$6? El intervalo indica que si es posible porque el cambio es \$4 o $X_1 \leq \infty$. Este cambio no afecta las variables básicas, es decir las variables básicas se quedan en la base pero si crea un efecto en los valores de estas variables y en la solución actual. Esto se debe a que se está aumentando la aportación a las ganancias de \$4 a \$6 por lo tanto la ganancia total aumentará pero el valor de la variable sigue siendo el mismo, 75. La única forma de aumenta el valor de la variable X_1 es teniendo más recursos. A mayor cantidad de recursos se espera una mayor producción y una ganancia mayor. El efecto neto del cambio de \$2 (\$6 - \$4) es de un aumento en la ganancia de \$400 donde Z = \$300 + 75Δ por lo tanto \$300 + 75(\$2) = \$300 + \$150 = \$450. Las variables básicas se quedaron con los mismos valores: $X_1 = 75$ y $S_2 = 25$.
Como pudo observar, los cambios en las variables básicas mientras estos se mantengan dentro del intervalo, no afectarán los valores de las variables básicas pero si se afectarán la solución final (Z_j).

CAMBIOS EN LOS VALORES DE LAS RESTRICCIONES (b_i) O NIVELES DE LOS RECURSOS

Un cambio en los valores de los recursos puede afectar tanto los valores de las variables básicas como el de la función objetivo. El agregar una cantidad mayor de recursos puede aumentar la producción y como consecuencia el valor de la solución. Y por el contrario una disminución de recursos puede disminuir el valor de la variable básica y a su vez el valor de la función objetivo.

La variables que representan los recursos disponibles en la solución inicial son a saber; S_1 con valor de 150 y S_2 con valor de 100. Para conocer cuántas unidades del primer recurso se pueden agregar o disminuir y poder leer el resultado en el tablón óptimo, habrá que buscar el intervalo de optimilidad. Este indicará el efecto de un cambio en el valor de 150 valor ubicado al lado derecho para la variable S_1. Para entender el procedimiento para la búsqueda del intervalo, agregamos un Δ en b_1, en el tablón inicial y este se refleja en la tabla inicial según aparece en el próximo tablón. Acuérdese que la variable S_1 representa el valor del primer recurso, para la primera restricción según lo demuestra el tablón inicial.

$2X_1 + 2X_1 \leq 150 + 1\Delta$; $S_1 = 150$

$X_1 + 2X_1 \leq 100 + 0\Delta$

		X_1	X_2	S_1	S_2	
	C_i / C_J	4	2	0	0	C_J/b_i
S_1	0	2	2	1	0	$150 + 1\Delta$
S_2	0	1	2	0	1	$100 + 0\Delta$
	Z_j	0	0	0	0	0
	ΔZ_j	4	2	0	0	

TABLÓN INICIAL

El delta agregado en la solución inicial símplex se moverá a través de las diferentes interacciones. En la interacción final aparecerá reflejado de la siguiente forma según lo ilustra el próximo tablón final. Observe en el tablón óptimo que las constantes de los deltas son iguales a las constantes correspondientes a la columna S_1, por lo tanto para buscar los deltas necesarios, le agregamos el producto del valor de b_i y la constante ubicada en relación a la columna de la variable de holgura que representa la restricción.

		X_1	X_2	S_1	S_2	
	C_i / C_J	4	2	0	0	C_J/b_i
X_1	4	1	1	½	0	75 +½Δ
S_2	0	0	1	-½	1	25 -½Δ
	Z_j	4	4	2	0	300 +2Δ
	ΔZ_j	0	-2	-2	0	

TABLÓN ÓPTIMO

Acuérdese que los valores de los lados derechos tienen que ser positivos o cero ($b_i \geq 0$) por lo tanto los ΔZ_j deberán ser también positivos o cero ($\Delta Z_j \geq 0$).

Se despejan los ΔZ_j para buscar el intervalo.

$75 + \frac{1}{2}\Delta \geq 0$ $\qquad$ $25 - \frac{1}{2}\Delta \geq 0$

$\frac{1}{2}\Delta \geq -75$ $\qquad$ $-\frac{1}{2}\Delta \geq -25$

$\Delta \geq -150$ $\qquad$ $\Delta \leq 50$

Para el primer recurso el intervalo es: $-150 \leq \Delta \leq 50$ y al sustituir los cambios en S_1, el intervalo para la variable en términos totales será de $0 \leq \Delta \leq 200$; $(-150 + 150 \leq S_1 \leq 50 + 150)$.

Supóngase que se aumenta el primer recurso a 175. ¿Se puede hacer este aumento y poder leer su efecto en el tablón óptimo? La respuesta a este pregunta, es afirmativa, se puede porque el cambio es menor que 50 y mayor que -150; (175 – 150 = 25). Y en términos totales para S_1, 175 es menor que 200.

¿Cómo se afectan las variables básicas y la función objetivo con el nuevo incremento de recursos por la cantidad de 175? La contestación a esta pregunta se obtiene sustituyendo el nuevo cambio de 25 en las nuevas ecuaciones. Para,

X_1	S_2	Z
$X_1 = 75 + \frac{1}{2}\Delta$	$S_2 = 25 - \frac{1}{2}\Delta$	$Z = 300 + 2\Delta$
$X_1 = 75 + \frac{1}{2}(25)$	$S_2 = 25 - \frac{1}{2}(25)$	$Z = 300 + 2(25)$
$X_1 = 75 + 12.5$	$S_2 = 25 - 12.5$	$Z = 300 + 50$
$X_1 = 87.5$	$S_2 = 12.5$	$Z = 350$

Al interpretar los resultados tenemos que un aumento de 175 unidades para la primera restricción causará un incremento de 87.5 unidades para X_1, 12.5 unidades para S_2 y $350 para la función objetivo.

En conclusión un aumento o disminución en los valores de los recursos afectará los valores de las variables básicas y el valor de la función objetivo.

BIBLIOGRAFÍA

Anderson Sweeney, Williams, **An Introduction to Management Science: Quantitative Approaches to Decision Making**, 9 edition, South Western, 2000.

Bixby, Robert E. "Solving Real-World Linear Programs: A Decade and More of Progress", **Operations Research** 50, 1 (January-February 2002): 3-15.

Dantzig, George B. "Linear Programming Under Uncertainty", **Management Science**, 50, 12 (December 2004): 1764-1769.

Greenberg, H. J. "How to Analyze the Results of Linear Programming- Part I: Preliminaries", **Interfaces** 23, 4 (July-August 1993): 58-68.

Higle, Julia L., and Stein W. Wallace. "Sensitivity Analysis and Uncertainty in Linear Programming", **Interfaces** 33, 4 (July-August 2003): 53-60.

Lapin Lawrence L, **Quantitative Methods for Business with Cases**, 5 edition, Harcourt Brac, Javanovich, 1991.

Orden, A. "Linear Programming from the ´40s to ´90s", **Interfaces** 23, 5 (September-October 1993): 2-12.

Pinney William E., Mc Williams, Donald B., **Management Science: An Introduction to Quantitative Analysis for Management**, Harper & Row, 1982.

Render Barry, Stair Ralph M. Jr., Hanna Michael E, **Quantitative Analysis for Management**, 10 edition. Pearson, Prentice Hall, 2009.